EXERCISE N° 1 | 35' | 6 point

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(0;0;1)$; $B(1;1;1)$ et $C(-1;0;-1)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$
   c) En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P} = (ABC)$ est $2x - 2y - z + 1 = 0$
2. Soit $D(1;-2;1)$
   a) Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre.
   b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   c) En déduire la distance point D au plan $\mathscr{P}$.
3. Soit $S = \left\{M(x;y;z) \text{ tels que } x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 4y - 2z - 3 = 0\right\}$
   a) Montrer que S est une sphère de centre D dont-on déterminera le rayon.
   b) Montrer que $\mathscr{P}$ coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont-on précisera le centre H et le rayon r.
4. Soit Δ la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) Calculer la distance du point D à la droite Δ.
   c) Montrer que la droite Δ coupe S en deux points dont-on déterminera les coordonnées.

EXERCISE N° 2 | 20' | 4 point

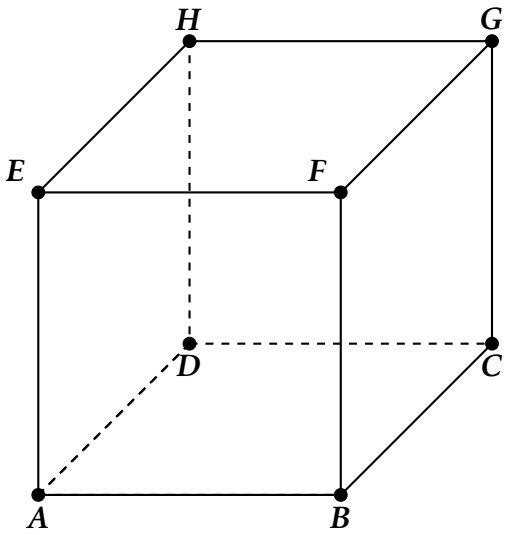
L'espace est orienté dans le sens direct.

On désigne par $ABCDEFGH$ un cube tel que $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé direct. Soit a un réel de $[0;1]$. On désigne par M le point de coordonnées $(a;0;a)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel a varie dans $[0;1]$
2. a) Calculer, en fonction de a, $d(M;(BC))$.
   b) Déterminer la position du point M pour que $d(M;(BC))$ soit minimale et déterminer cette distance.
3. Déterminer le réel a pour que les points $M;B;C$ et H soient coplanaires.
4. On suppose que $a \neq \frac{1}{2}$

a) Calculer, en fonction de a, le volume $\mathbf{V}(a)$ du tétraèdre $MBCH$.

b) Déterminer les positions du point M pour que $\mathbf{V}(a)$ soit le $\frac{1}{12}$ du volume du cube $ABCDEFGH$.



EXERCISE N° 3 | 35' | 5 point

Dans un cube $ABCDEFGH$, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[GH]$. K désigne le centre de la face $BCGF$. On menu l'espace du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$

1) a) Déterminer les coordonnées des points $A, B, C, D, E, F, G, I, J$ et K.

b) Montrer que $DIFJ$ est un losange

c) Montrer que l'aire de $DIFJ$ vaut $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P} = (DIJ)$

e) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$

f) Déterminer la distance du point E au plan $\mathscr{P}$ puis calculer le volume du pyramide $DIFJE$.

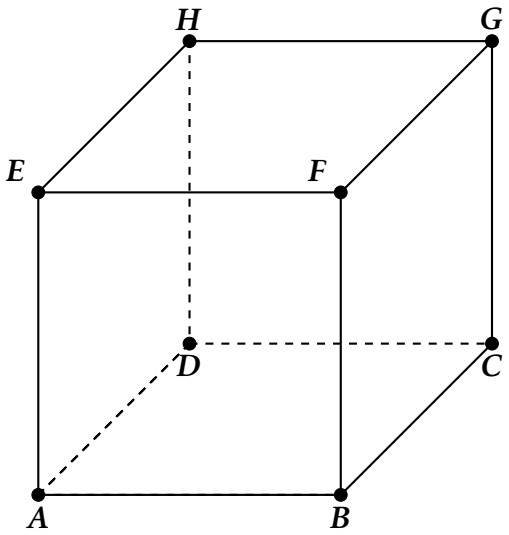
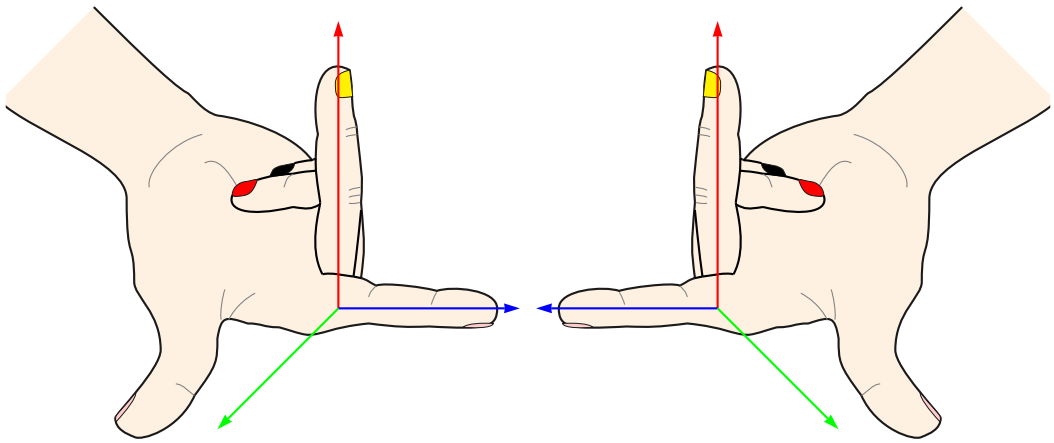
2) Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ).

a) Donner une représentation paramétrique de Δ et montrer que K est un point de Δ.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de Δ avec le plan (DIJ).

c) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

3 Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2y-2z-1=0$

a Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon

b Montrer que $S \cap \mathscr{P}$ est un cercle que l'on caractérisera